113-2學年度

有限元素法期末個人書面報告

指導老師：劉彥辰 老師

系級：土木碩一

學號：11372009

姓名：邱昱倫

日期：2025/06/18

目錄

[目錄 2](#_Toc201411386)

[物理問題介紹 3](#_Toc201411387)

[第一部分 課堂講解方式切分元素流程(四個元素) 4](#_Toc201411388)

[第二部分 自行切分元素流程(四個元素) 6](#_Toc201411389)

[第三及第四部分 自行切分元素(本篇報告分割23個元素) 7](#_Toc201411390)

# 物理問題介紹

本期末報告主要在比較一端固接，且半徑為1單位的圓柱構件受扭矩的位移解析解及利用切分二為三角形元素的數值解，同時將切分元素的過程及切分元素的位置呈現在本篇報告。

本物理問題的控制方程式(Governing Equation, G.E.)及邊界條件(Boundary Condition, B.C.)為：

G.E.:

B.C.:

(in Γ)

其理論解可被表示為：

其中u為應力，和空間座標x及y有關，而a及b為橢圓的長軸、短軸參數，但因為本題目為圓形柱體，所以a = b = 1，而*G*為材料的剪力模數，*θ*則代表旋轉角，在本篇報告分析的純扭問題中，*Gθ=*5為常數。

# 第一部分 課堂講解方式切分元素流程(四個元素)

一張含有 行, 圖表, 繪圖, 斜率、斜坡 的圖片

AI 產生的內容可能不正確。

圖 1 課堂方式切分四個元素示意圖

如圖 1所示，依照課堂所建議的節點數目有6個，各節點座標資訊如表 1所示，所形成的三角形元素則有4個，依照課堂講解的方式計算每個元素的面積，詳見表 2。

表 1 課堂方式切分節點資訊及座標

|  |  |
| --- | --- |
| 節點編號 | 節點座標 |
| 1 | (0,0) |
| 2 | (1,0) |
| 3 | (0.9239, 0.3827) |
| 4 | (0.7071, 0.7071) |
| 5 | (0.3827, 0.9239) |
| 6 | (0,1) |

如課程內容所示，面積計算方法：

表 2 課堂方式切分元素面積

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 元素編號 | 構成節點 | 元素面積 |
| 1 | 1,2,3 | 0.1913 |
| 2 | 1,3,4 | 0.1913 |
| 3 | 1,4,5 | 0.1913 |
| 4 | 1,5,6 | 0.1913 |

隨後，因為本物理問題切分線性三角形元素，且控制方程式中無交叉微分項，進需計算β及γ值搭配元素面積即可依照相對位置組成，先拆成四個元素內部所形成3\*3的小矩陣，再透過節點編號合併，組成整體系統的6\*6矩陣k：

將每個元素所對應的節點依照逆時針規則帶入i、j、k位置之後，可以得到以下結果：

可發現，四個小型k矩陣都相同，這是因為每個的三角形元素形狀及面積皆全等，β值及γ值也因為邊長關係相同所以一致。

下一步，透過節點編號合併出總體勁度矩陣k：

接下來，定義外加條件f向量，為描述計算域(Ω)內部的外力大小。f的計算過程，也是先由單一元素所形成的3\*1向量，因為這一物理問題的非齊次項*Gθ*為定值，所以也是定值，每一項都可以被表示成：

因此，在同一個元素內的*f*向量都相同，因為面積都對應到*Ae*，若另一個元素面積不同，則計算的*f*才有所不同。

透過節點編號的組合所合併出來的6\*1向量：

定義完計算域內部的節點外加條件，對於在邊界上(Γ)的節點，要用Q，一個6\*1的向量，來描述外加條件對該點所造成的效應，所以純扭的物理問題中，對於在計算域內部的節點，Q向量所對應的元素數值為0，其他在邊界上的點數值則需透過求解完物理量之後再帶回系統求解Q：

依照課堂講解過程，有了k矩陣、f向量、Q向量，可以定義u向量。

在此問題中，u所對應的物理量是應力大小，因為本篇報告在這種分割方式下產生了6個節點，所以u向量也是6\*1的尺寸，將邊界條件帶入修改u向量，我們可以知道在邊界上的點，應力值都是0，所以，都為0。

如此一來，我們可以將原本的線性方程組：，觀察u向量的內部，可以發現此問題若要求解u1可以化簡程一條方程式：

得到u1之後，我們可以再帶回其他方程式求解，即：

反推各個元素後，帶回原始Q向量，則物理問題即求解完畢：

# 第二部分 自行切分元素流程(四個元素)

一張含有 行, 圖表, 繪圖, 斜率、斜坡 的圖片

AI 產生的內容可能不正確。

圖 2 自行分割四個元素示意圖

# 第三及第四部分 自行切分元素(本篇報告分割23個元素)

一張含有 圖表, 行, 繪圖 的圖片

AI 產生的內容可能不正確。

圖 3 自行分割二十三個元素示意圖